ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том ???, с. ??–??

МАТЕМАТИКА

УДК 51.74

ДИНАМИКА КАПЛИ НЕФТИ В ВОДНОЙ СУСПЕНЗИИ

© 2023 г. А. М. Мейрманов[1,*]

Представлено академиком И. А. Таймановым
Поступило ??.??.202?
После доработки ??.??.202?
Принято к публикации ??.??.202?

Настоящая рукопись является первой из публикаций, посвященных динамике вытеснения нефти водной эмульсией. Предполагается, что обе жидкости разделены неизвестной поверхностью и их динамика описывается системой уравнений Стокса для вязких сжимаемых жидкостей. Одна из жидкостей (нефть) является каплей, окруженной другой жидкостью (водной эмульсией). На границе раздела двух жидкостей выполнены стандартные условия непрерывности перемещений и напряжений и дополнительное условие того, что область занятая каждой из жидкостей является индивидуальным объемом, то есть состоит из одних и тех же частиц. Следуя идеям О. Ладыженской, Н. Уральцевой и В. Солонникова исходная задача разбивается на ряд последовательно решаемых задач, первой из которых является модельная задача дифракции для системы Стокса для двух полупространств. В ней необходимо получить решение в явном виде некоторые сингулярных интегралов. Далее для произвольного интервала времени $[0, T]$ решатся задача дифракции, когда форма капли есть заданная гладкая замкнутая ограниченная поверхность и, наконец, решается исходная нелинейная задача об определении формы капли в процессе ее движения.

Ключевые слова и фразы: Задачи со свободными границами, задача дифракции для системы уравнений Стокса, представление решений в канонических областях в форме сингулярных интегралов, метод Ньютона-Канторовича.

DOI: 10.31857/S2686954722020084

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Задача о вытеснении нефти водной эмульсией в горных породах является основной при создании гидродинамического симулятора нефтяного месторождения. Естественным является предположение о том, что соответствующая математическая модель должна базироваться на постулатах классической механики Ньютона сплошных сред [1], [2]. С другой стороны, во всех существующих гидродинамических симуляторах нефтяных месторождений ("Эклипс"и "Black Oil"фирмы Schlumberger, "Tempest"фирмы "Roxar "VIP"фирмы Landmark и "TimeZY"фирмы "Standard Oil and Trust") базовой математической моделью является математическая модель Баклея-Леверетта [3], которая, по своей сути, является набором постулатов, никак не связанных с классической механикой Ньютона. Следуя R. Burridge, J. B. Keller [4] и E. Sanchez-Palencia [5], для точного математического моделирования физических процессов в горных породах в первую очередь необходимо описать физический процесс законами классической механики Ньютона на микроскопическом уровне (характерный размер- десятки микрон), которые проверены опытом в течении столетий. Но такое точное описание совершенно бесполезно с практической точки зрения, поскольку любые численные реализации точных моделей потребуют месяцы и месяцы вычислений. Поэтому следующим шагом в методе этих авторов стал процесс усреднения (гомогенизации), позволяющий на основе соответствующей микроскопической модели точно описать физический процесс уже на макроскопическом уровне (характерный размер- десятки сантиметров или метров). Метод усреднения позволил построить точные модели для многих физических процессов, когда микроструктура сплошной среды заранее известна. Но в случае задачи вытеснения нефти суспензией никакого прогресса не произошло. Во-первых, не было соответствующей математической модели на микроскопическом уровне и, во-вторых, если она бы и была, не было методов решения задач с неизвестными (свободными) границами и, тем более, методов усреднения таких задач. Задачи со свободными границами являются одними из наиболее трудных задач в теории дифференциальных уравнений с частными производными [6], [7]. Как мы уже отмечали выше, наша основная задача разбивается на ряд последовательно решаемых задач:

[1] *Институт ионосферы Министерства образования и науки Республики Казахстан,Алматы, Казахстан*

[*] *E-mail: anvarbek@list.ru*

I-модельная задача дифракции для уравнений Стокса в полупространствах;

II-доказательство существования классического решения задачи дифракции для уравнений Стокса в областях с заданной гладкой границей S раздела областей Ω_o, содержащей нефть, и Ω_s, содержащей суспензию.

III-доказательство существования классического решения движения капли нефти в водной суспензии в малом по времени (метод Ньютона-Канторовича).

IV-доказательство существования классического решения движения капли нефти в водной суспензии в целом по времени (сведение исходной задачи к канонической задаче в полупространствах с помощью метода декомпозиции).

V-усреднение.

В настоящей публикации мы ограничимся этапами $I - IV$.

Исходная нелинейная задача дифракции для искомой (свободной) границы $\Gamma(t)$ раздела двух вязких жидкостей состоит в нахождении вектора скорости $\boldsymbol{v}_o$, вектора перемещений $\boldsymbol{w_o}$ и давления p_o нефти и вектора скорости $\boldsymbol{v}_s$, вектора перемещений $\boldsymbol{w}_s$ и давления p_s суспензии, и самой границы $\Gamma(t)$ по следующим уравнениям

$$\nabla\cdot\big(\alpha_{\mu,j}\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_j)-p_j\,\mathbb{I}\big)=0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c^2_{f,j}}\,\frac{\partial\,p_j}{\partial\,t}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}_j=0 \tag{2}$$

в областях $Q_{f,j}=\bigcup\limits_{t=0}^{\infty}\Omega_{f,j}(t),\ \ j=o,\,s$, граничным условиям

$$\big(\mu_o\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_o)-p_o\,\mathbb{I}\big)<\boldsymbol{n}>=\big(\mu_s\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_s)-p_s\,\mathbb{I}\big)<\boldsymbol{n}>, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{w}_o=\boldsymbol{w}_s,\ \ \frac{\partial\,\boldsymbol{w}_j}{\partial\,t}=\boldsymbol{v}_j,\ \ j=o,\,s \tag{4}$$

на искомой границе $\Gamma(t)$ и начальным условиям

$$\boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{x};0)=\boldsymbol{w}^0_j(\boldsymbol{x}),\ \ p_j(\boldsymbol{x};0)=p^0_j(\boldsymbol{x}),\ \ j=o,\,s,\ \Gamma(0)=\Gamma^0. \tag{5}$$

Очевидно, что траектории $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi},t)$ транспортного уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{X};t),\ \ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi};0)=\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\xi}\in\Omega_j(0),\ \ j=o,\,s, \tag{6}$$

которые начинаются в точке $\boldsymbol{\xi}\in\Omega_{f,j}(0)$, будут находиться $\Omega_{f,j}(t),\ j=o,\,s$ для всех $t>0$.

То есть, мы можем определить $\Gamma(t)$ как поверхность

$$\Gamma(t)=\{\boldsymbol{x}\in\Omega:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{\xi};t),\ \boldsymbol{\xi}\in\Gamma^0\},\ \ \frac{d\boldsymbol{X}_0}{dt}=\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{X}_0;t),\ \boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{\xi};0)=\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\xi}\in\Gamma^0. \tag{7}$$

В (1) – (7) $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})=\dfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla^*\boldsymbol{u})$ есть симметрический градиент вектор–функции $\boldsymbol{u}$, $\mathbb{I}$ единичный тензор второго порядка, $\alpha_{\mu,j}$ и $c_{f,j},\ j=o,\,s$ безразмерные вязкости и безразмерные скорости звука соответственно в нефти и суспензии.

Введем следующие обозначения [8]:

$$G_2(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{y}')=\frac{1}{4\,\pi}\ln\frac{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}{|x_1-y_1|^2+|x_2+y_2|^2} \tag{8}$$

-функция Грина оператора Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^2$ и

$$G_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\frac{1}{4\,\pi}\big(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|+|x_3-y_3|^2\big)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\big(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|+|x_3+y_3|^2\big)^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

-функция Грина оператора Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^3$.

По построению функции Грина бесконечно дифференцируемы при $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ и

$$G_k(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=G_k(\boldsymbol{y};\boldsymbol{x}),\ \nabla_x G_k(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\nabla_y G_k(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}),\ \ k=1,2.$$

Кроме того положим

$$I_2(u)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G_2(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{y}')u(\boldsymbol{y}')dy', \;\; \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2,$$

$$I_3(U)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}',0)U(\boldsymbol{y}')dy',$$

$$J_j(f)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3_j} G_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})dy, \;\; \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3, \;\; j = o,\, s, \tag{10}$$

$\mathbb{R}^3 = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3), \;\; |\boldsymbol{x}|^2 = (|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|)^2 < \infty\}$, $\mathbb{R}^3_o = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\, x_3 > 0\}$, $\mathbb{R}^3_s = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\, x_3 < 0\}$, $\boldsymbol{x}' = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $|\boldsymbol{x}'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Теорема 1. *Функции*

$$u_o(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial\, x_3} I_3(U_o)(\boldsymbol{x}) + J_o(f_o)(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_o, \tag{11}$$

$$u_s(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial\, x_3}\, I_3(U_s)(\boldsymbol{x}) + J_s(f_s)(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_s \tag{12}$$

являются решениями задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\triangle u_j = f_j(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_j, \;\; u_j(\boldsymbol{x}', 0) = U_j(\boldsymbol{x}'), \;\; j = o,\, s \tag{13}$$

в полупространствах $\mathbb{R}^3_j, \;\; j = o,\, s.$

В частности,

$$\frac{\partial}{\partial\, x_3} I_3(U_o)(\boldsymbol{x}', 0) = -u_o(\boldsymbol{x}', 0) = -U_o(\boldsymbol{x}'), \;\; \frac{\partial}{\partial\, x_3} I_3(U_s)(\boldsymbol{x}', 0) = u_s(\boldsymbol{x}', 0) = U_s(\boldsymbol{x}'). \tag{14}$$

Если $f_j \in \mathbb{C}^\alpha_\infty(\mathbb{R}^3_j)$ *и* $U_j \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ *то* $u_j \in \mathbb{C}^{2+\alpha}_\infty(\mathbb{R}^3_j), \;\; j = o,\, s$ [10].

Мы используем обозначения функциональных пространств и норм в них, принятых в [10] и в [11]. Через $\mathbb{C}^{k+\alpha}_\infty(\overline{\Omega})$, $k = 0,\, 1,\, 2,\, ...$ мы обозначаем пространство $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{L}_\infty(\overline{\Omega})$.

Теорема 2. [8] *Функция*

$$u(\boldsymbol{x}') = \int_{\mathbb{R}^2} G_2(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{y}')\, f(\boldsymbol{y}')dy' \equiv\, I_2(f)(\boldsymbol{x}') \tag{15}$$

является решением уравнения Пуассона

$$\triangle' u = f(\boldsymbol{x}'), \;\; \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2 \tag{16}$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^2$.

Если $f \in \mathbb{C}^\alpha_\infty(\mathbb{R}^2)$, *то* $u \in \mathbb{C}^{2+\alpha}_\infty(\mathbb{R}^2)$ [10].

Теорема 3. *Функции*

$$u_o(\boldsymbol{x}) = -I_3(H_o)(\boldsymbol{x}) + J_o(f_o)(\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

и

$$u_s(\boldsymbol{x}) = I_3(H_s)(\boldsymbol{x}) + J_s(f_s)(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

являются решениями задачи Неймана для уравнения Пуассона

$$\triangle u_j = f_j(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_j, \;\; \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_3}(\boldsymbol{x}', 0) = H_j(\boldsymbol{x}'), \;\; j = o,\, s. \tag{19}$$

Если $f_j \in \mathbb{C}^{1+\alpha}_\infty(\mathbb{R}^3_j)$, *то* $u_j \in \mathbb{C}^{2+\alpha}_\infty(\mathbb{R}^3_j), \;\; j = o,\, s$ *на произвольном интервале времени* $[0,\, T]$ [10].

Теорема 4. *Задача (1) – (6) имеет единственное классическое решение* $\boldsymbol{w}_j,\, \boldsymbol{v}_j \in \mathbb{C}^{2+\alpha}_\infty(\mathbb{R}^3_j)$ *и* $p_j \in \mathbb{C}^{1+\alpha}_\infty(\mathbb{R}^3_j), \;\; j = o,\, s$ *на произвольном интервале времени* $[0,\, T]$.

Теорема 5. *Задача (1) – (7) имеет единственное классическое решение* $\boldsymbol{w}_j,\, \boldsymbol{v}_j \in \mathbb{C}^{2+\alpha}_\infty(\overline{\Omega_{f,j}(t)})$ *и* $p_j \in \mathbb{C}^{1+\alpha}_\infty(\overline{\Omega_{f,j}(t)}), \;\; j = o,\, s$ *на произвольном интервале времени* $[0,\, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теорем 1–3 достаточно сложное и требует подробных вычислений, что не позволяет формат нашей статьи. Поэтому ограничимся идеями доказательств. Основные идеи доказательства состоят в замене краевого условия (7) на свободной границе транспортными уравнениями

$$\frac{d\alpha_{\mu,j}}{dt} \equiv \frac{\partial\,\alpha_{\mu,j}}{\partial\,t} + \nabla\alpha_{\mu,j}\cdot\boldsymbol{v}_j = 0,\ \ \alpha_{\mu,j}(\boldsymbol{x};0) = \mu_j,\ \ j = o,\,s, \tag{20}$$

решение задачи дифракции в полупространствах и представление решения в виде сингулярных интегралов, использовании метода Ньютона-Канторовича [9] для доказательства существования классического решения задачи в малом по времени [9] и применение принципа декомпозиции, предложенного в работах [10] и [11] О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой и В. А. Солонникова, для исследования дифференциальных свойств в целом по времени классических решений задачи дифракции для системы уравнений Стокса в заданных областях.

А именно, с помощью разбиения единицы исходная задача сводится к решению конечного числа задач в малых областях с центром в точках $\boldsymbol{x}_k \in \gamma_k$. Далее для каждой малой области участок границы выпрямляется переходом к новым локальным координатам $\boldsymbol{y}$ и задача в каждой малой области сводится к канонической задаче дифракции (1) – (6) с заданной правой частью $\boldsymbol{f}_j \in \mathbb{C}^{\alpha}_{\infty}(\mathbb{R}^3_j)$ для новых искомых функций $\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{y};t) = \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x};t)$, $q_j(\boldsymbol{y};t) = p_j(\boldsymbol{x};t)$ в полупространствах $\mathbb{R}^3_j$ с границей раздела $\Gamma = \{y_3 = 0\}$:

Решение последней дается формулами

$$\boldsymbol{u}_o = -\frac{\partial}{\partial\,y_3}I_3(\boldsymbol{U}) + \mathfrak{f}_o,\ \ \boldsymbol{u}_s = \frac{\partial}{\partial\,y_3}I_3(\boldsymbol{U}) + \mathfrak{f}_s,$$
$$U_3(\boldsymbol{y}';t) = \frac{1}{2}I_3\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{F}_{o,3}}{\partial\,y_3} + \frac{\partial\,\mathfrak{F}_{s,3}}{\partial\,y_3}\Big)(\boldsymbol{y}';t),$$
$$U_1 = I_3\big(-\triangle'\,I_3(U_1) + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_{s,1}}{\partial\,y_3})\big), U_2 = I_3\big(-\triangle'\,I_3(U_2) + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_{s,2}}{\partial\,y_3})\big),$$
$$I_3(U_3) = \frac{1}{2}I_2\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{f}_{s,3}}{\partial\,y_3} + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_{o,3}}{\partial\,y_3}\Big),$$
$$I_3(U_1) = \frac{\partial}{\partial\,y_1}I_2(U_3) + \frac{\nu_o}{\nu_o+\nu_s}\,I_2\,\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{f}_{o,1}}{\partial\,y_3} + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_{o,3}}{\partial\,y_1}\Big) - \frac{\nu_s}{\nu_o+\nu_s}I_2\,\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{f}_{s,1}}{\partial\,y_3} + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_{s,3}}{\partial\,y_1}\Big)$$
$$I_3(U_2) = \frac{\partial}{\partial\,y_2}I_2(U_3) + \frac{\nu_o}{\nu_o+\nu_s}\,I_2\,\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{f}_{o,2}}{\partial\,y_3} + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_{o,3}}{\partial\,y_2}\Big) - \frac{\nu_s}{\nu_o+\nu_s}I_2\,\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{f}_{s,2}}{\partial\,y_3} + \frac{\partial\,f_{s,3}}{\partial\,y_2}\Big), \tag{21}$$

$$q_j(\boldsymbol{y};t) = q^0_j(\boldsymbol{y})\,\exp\Big(-\frac{c^2_{f,j}}{\nu_j}\,t\Big),\ \ \ j = o,\,s. \tag{22}$$

Здесь $U_k(\boldsymbol{y}';t) = u_{s,k}(\boldsymbol{y}',0;t) = u_{o,k}(\boldsymbol{y}',0;t)$, $\mathfrak{f}_j = J_j(\boldsymbol{f}_j)$, $\ j = o,\,s$ и $\mathfrak{f}_o(\boldsymbol{x}',0;t) = \mathfrak{f}_s(\boldsymbol{x}',0;t) = \boldsymbol{\mathfrak{F}}(\boldsymbol{x}';t)$.

Обращаясь к [10] заключаем, что

$$\max_{k=1,2,3}|U_k|^{2+\alpha}_{\mathbb{R}^3_j} \leqslant M\ \max_{k=1,2,3}|f_k|^{\alpha}_{\mathbb{R}^3_j}, \tag{23}$$

где постоянная M не зависит от T и $\boldsymbol{f}$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта МОН РК (проект № AP19676964) в институт ионосферы Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Meirmanov, Mathematical models for poroelastic flow, Paris, Atlantis Press, 2014.

[2] Л. В. Овсянников, Введение в механику сплошных сред, Часть I, II, Новосибирский Госудпрственный Университет, Новосибирск, 1977. (Russian, for an English translation, see [1])

[3] S. E. Buckley, M. C. Leverett, Mechanism of fluid displacements in sands, Transactions of the AIME, v.146, 1942, pp. 107–116.

[4] R. Burridge, J. B. Keller, Poroelasticity equations derived from microstructure, J. Acoust. Soc. Am., V. 70, issue 4, 1981, pp. 1140 – 1146.

[5] Э. Санчес-Паленсия, Неоднородные среды и теория колебаний, Москва, Мир, 1984.

[6] А. Мейрманов, Задача Стефана, Новосибирск, Наука, 1986.

[7] А. Мейрманов, О классическом решении макроскопической модели подземного выщелачивания редких металлов, Известия РАН, v. 86, № 4, 2022, 116-161.

[8] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, Эллиптические дифференциальные уравнения виорого порядка, Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

[9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, Наука, 1972.

[10] О. А. Ладыженская, Н. Н Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Москва, Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1967 г.

[11] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Москва, Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1967 г.

DYNAMICS OF AN OIL DROP IN AN AQUEOUS SUSPENSION.

А. М. Мейрманов[1,*]

[a]Institute of the Ionosphere of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

Presented by Academician of the RAS I. A. Taimanov

The proposed manuscript is the first of articles, devoted to the dynamics of oil displacement by aqueous suspension in the pore space of a solid skeleton. We assume that the liquids are separated by some unknown interface. The solid skeleton has a given periodic structure with a dimensionless pore size $\varepsilon \ll 1$. It is a free boundary problem, since in the microscopic description the interface between oil and suspension must be determined. Such problems are among the most difficult problems in the theory of partial differential equations, and, as a rule, existence results are possible only locally in time. We will obtain global in time result by reducing the free boundary problem to the problem of finding the viscosity of liquids, which will be described by the transport equation. The main purpose of this article is to describe the joint motion of a single oil drop in the surrounding water suspension.

Keywords: free boundary problems, diffraction problems for Stokes equations, representation of solutions in half-spaces in terms of singular integrals, Newton-Kantorovich method.

REFERENCES

[1] A. Meirmanov, Mathematical models for poroelastic flow, Paris, Atlantis Press, 2014.

[2] L. V. Ovsiannikov, Introduction to continuum mechanics, Parts I, II, Novosibirsk, Novocibirsk State University, 1977 (Russian, for an English translation, see [1])

[3] S. E. Buckley, M. C. Leverett, Mechanism of fluid displacements in sands, Transactions of the AIME, v.146, 1942, pp. 107–116.

[4] R. Burridge, J. B. Keller, Poroelasticity equations derived from microstructure, J. Acoust. Soc. Am., V. 70, issue 4, 1981, pp. 1140 – 1146.

[5] E. Sanchez-Palencia, Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Phys., 127, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[6] A. Meirmanov, The Stefan Problem, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[7] A. Meirmanov, On the classical solutions of the macroscopic model of in-situ leaching of rare metals, Isvestya Mathematics, 2022, v. 86, № 4, 116-161.

[8] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, Berlin-Heuidelberg-New York-Tokyo, 1983.

[9] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Introductory real analysis, Dover Publications, INC., New York, 1975.

[10] O. A. Ladyzhenskaya, N. N Uraltseva, Linear and quasilinear elliptic equations, Academic Press, New York and London, 1968.

[11] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N Uraltseva, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Transl. Math. Monogr., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

DYNAMICS OF AN OIL DROP IN AN AQUEOUS SUSPENSION.

А. М. Мейрманов[1,*]

[a]Institute of the Ionosphere of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

Presented by Academician of the RAS I. A. Taimanov